

Das Schattenkreuz in der Jungfrau (4158 m.ü.M.)

Anwendung astronomischer Berechnungen



Matura-Arbeit von David Lips
erstellt im Jahr 2006
am Gymnasium Burgdorf
betreut von Simon Fankhauser

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
1.1	Einführung/Motivation.....	1
1.2	Zielsetzung.....	1
2	Die Entstehung des Schattenkreuzes	2
2.1	Abhängigkeit vom Stand der Sonne	2
2.1.1	Orientierung am Himmel.....	2
2.1.2	Berechnung des Sonnenstandes	5
2.2	Geographische Gegebenheiten	14
2.2.1	Bau eines Modells der Jungfrau.....	14
2.2.2	Experimente mit dem Modell.....	18
2.2.3	Gebirgsformen, die das Schattenkreuz verursachen	22
2.3	Beobachtung der Jungfrau	23
2.3.1	Beobachtung des Schattenkreuzes am 08.10.2006.....	23
2.3.2	Beobachtung der Jungfrau mit dem Modell im Vordergrund	25
2.3.3	Vergleich des Schattenkreuzes an verschiedenen Tagen	26
3	Schlussfolgerung, Fazit	27
3.1	Schlussfolgerung.....	27
3.2	Persönliches Fazit	28
3.2.1	erreichte Ziele	28
3.2.2	Kritik	28
4	Literaturverzeichnis, Bildernachweis, Dank, eidesstattliche Erklärung	29
4.1	Literaturverzeichnis	29
4.2	Bildernachweis	30
4.3	Dank.....	31
4.4	eidesstattliche Erklärung	31
5	Anhang.....	32
5.1	Excel-Programm zur Berechnung des Sonnenstandes.....	32
5.2	Differenz zwischen meinen Berechnungen und jenen von Calsky.com	32
5.3	Landeskarte mit eingezeichnetem im Modell dargestellten Gebiet	32

1 Einleitung

1.1 Einführung/Motivation

Was hat mich dazu bewegt, einem Schattenkreuz in der Jungfrau diese Arbeit zu widmen?

Auf die Idee über dieses Naturphänomen meine Matura-Arbeit zu schreiben kam ich erstmals, als wir im Herbst 05 an einem schönen Sonntagabend einen Familienspaziergang machten. Eiger, Mönch und Jungfrau strahlten im Abendrot und dabei war in der Jungfrau ein Schattenwurf zu erkennen, der mich sehr stark an ein Kreuz erinnerte. Bei mir kam nun die Frage auf, warum dieses Schattenkreuz entsteht und wie so es im Herbst beziehungsweise im Frühling besonders ausgeprägt ist.

Was mich zusätzlich bewegt hat dieses Thema zu wählen, ist die Tatsache, dass es darüber praktisch keine Literatur gibt. Daraus folgt, dass die Grundlagen dafür selbst erarbeitet werden müssen. Dies entspricht auch dem Grundgedanken einer Matura-Arbeit, die das Kennenlernen des wissenschaftlichen Arbeitens wie auch die Förderung der Selbstständigkeit zum Ziele hat.

Es ist mir bewusst, dass dies nicht gerade ein einfaches Thema ist, aber ich will mich dieser Herausforderung stellen.

1.2 Zielsetzung

Im folgenden Abschnitt sollen die Ziele dieser Arbeit erläutert werden.

Die primär zu beantwortende Frage ist:

Auf Grund welcher Gegebenheiten entsteht das Schattenkreuz in der Jungfrau? Dabei soll die dortige Gebirgsform analysiert werden. Auch will ich die Abhängigkeit des Schattens vom Stand der Sonne darstellen. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Die erste Möglichkeit ist, den *Stand der Sonne für einen Zeitpunkt zu berechnen* an dem das Schattenkreuz vorhanden ist, bzw. auf ein Foto abgelichtet wurde. Für den gleichen Zeitpunkt kann der Stand der Sonne mit Hilfe eines senkrecht in den Boden gesteckten Stabes und dem sich daraus ergebenden Schatten angegeben werden. Dies entspräche der experimentellen Kontrolle der Berechnungen.
- Eine weitere Möglichkeit ist der *Bau eines Modells der Jungfrau*. Das Modell kann nun so auf die Sonne ausgerichtet werden, dass das Schattenkreuz zu sehen ist.

Im optimalen Fall ergeben nun beide Methoden das gleiche Resultat bzw. die selben Winkel, unter der die Sonne zu sehen sein muss. Ich bin darauf gespannt.

2 Die Entstehung des Schattenkreuzes

In diesem Teil der Arbeit versuche ich herauszufinden, wieso der kreuzähnliche Schattenwurf entsteht. Zudem interessiert mich, auf Grund welcher Gegebenheiten an einem bestimmten Datum das Schattenkreuz vorhanden ist, während es an einem anderen Tag nicht zu sehen ist.

2.1 Abhängigkeit vom Stand der Sonne

Der erste wichtige Punkt, von dem die Entstehung des Schattenkreuzes abhängig ist, ist der Stand der Sonne. Nun stellt sich die Frage, wie man deren Position herausfinden kann.

2.1.1 Orientierung am Himmel.¹

Bevor man den Stand der Sonne berechnen kann, müssen zuerst die dafür notwendigen Grundbegriffe erklärt werden. Zusätzlich soll dieser Abschnitt als Einführung zur Orientierung am Himmel dienen.

Die scheinbare Bewegung der Sonne

Für einen auf der Erde ruhenden Beobachter führt die Sonne am Himmelsgewölbe eine Bewegung von Osten nach Westen aus. Das Himmelsgewölbe stellt man sich als unendlich grosse Kugel vor, deren Zentrum die Erde ist. Die Bewegung der Sonne entsteht durch die Drehung der Erde um ihre eigene Achse. Verlängert man die Erdachse, so entstehen als Schnittpunkte mit der Himmelskugel der Himmelsnordpol P_N und der Himmels-südpol P_S . Sie sind die Zentren der scheinbaren Bewegung der Sonne. Die Verbindung $P_N P_S$ heisst *Himmelsachse*.

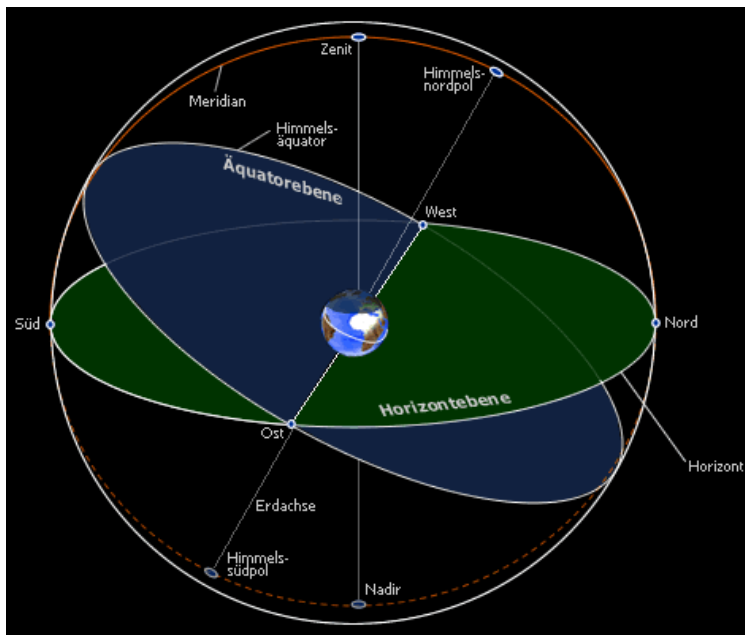


Abb. 1: Die Himmelskugel

Zwischen Aufgang und Untergang erreicht die Sonne in Südrichtung ihre grösste Höhe über dem Horizont. Dies nennt man die (obere) *Kulmination* der Sonne. Ihre kleinste Höhe unter dem Horizont erreicht sie in Nordrichtung, entsprechend der unteren Kulmination. Der Grosskreis, der P_N , P_S sowie den *Zenit* Z , d.h. den Punkt senkrecht über dem Beobachtungsort verbindet, heisst *Meridian*. Die Kulminationen sind die Meridiandurchgänge der Sonne.

¹ Mit Ausnahme von kleinen Anpassungen ist der Text des Abschnitts " 2.1.1 Orientierung am Himmel" von <http://www.zum.de/Faecher/Materialien/gebhardt/astonomie/koordsys.html> übernommen

Um den Standort eines Objekts anzugeben, kann man verschiedene Koordinatensysteme verwenden. Im Folgenden möchte ich die zwei gebräuchlichsten erläutern, nämlich das Horizont- und das Äquatorsystem.

Das Horizontsystem

Beim Horizontsystem liegt der Bezugskreis in der lokalen Horizontebene, also in der Ebene des Beobachters.

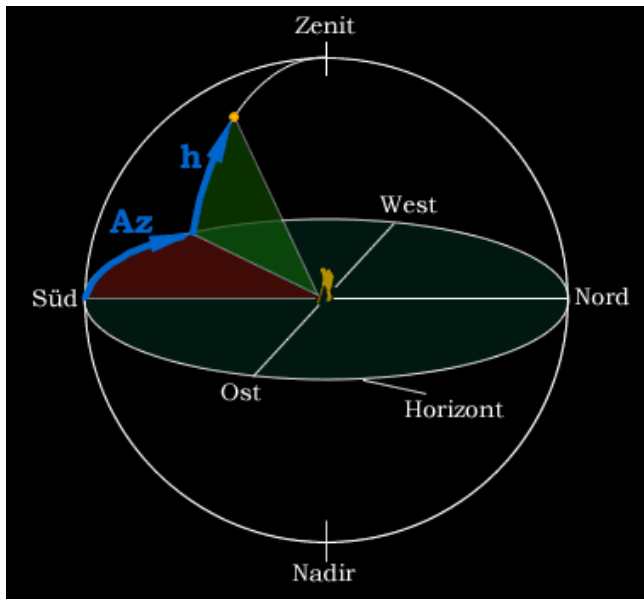


Abb. 2: Das Horizontsystem von ausserhalb des Systems aus betrachtet

Der Punkt senkrecht über dem Beobachtungsort heisst *Zenit*, der Punkt senkrecht unter ihm *Nadir*. Der Grosskreis durch Objekt und Zenit heisst *Vertikalkreis*.

Die Position eines Objektes wird durch zwei Winkel beschrieben:

Der **Azimuth** (Az) ist der Winkel zwischen dem Südpunkt und dem Vertikalkreis des Objektes. In der astronomischen Zählweise wird der Azimuth von Süden aus in westliche Richtung gemessen.

Die **Höhe** h ist der Winkel zwischen dem Objekt und der Horizontebene.

Der Winkel $90^\circ - h$ heisst auch *Zenitdistanz*.

Im Horizontsystem sind beide Koordinaten der Sonne zeitabhängig.

Das Horizontsystem ist wahrscheinlich für die meisten Menschen am „einleuchtendsten“, da es dem natürlichen System der Beobachtung entspricht. Doch hat eben jeder Beobachter sein eigenes System, was allgemeingültige Aussagen schwierig macht.

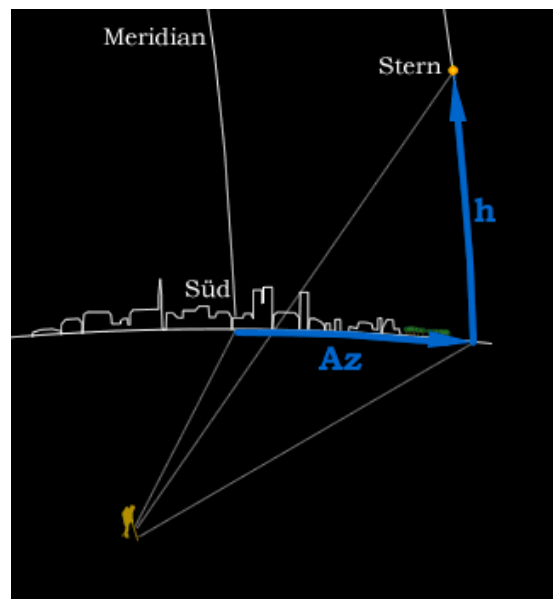


Abb. 3: Das Horizontsystem aus der Sicht eines erdgebundenen Beobachters

Das Äquatorsystem

Das Äquatorsystem besitzt als Grundebene nicht die Ebene des Beobachters, sondern benutzt die Projektion des Erdäquators vom Erdmittelpunkt aus auf die Himmelskugel als Grundkreis. Diesen Kreis nennt man *Himmelsäquator*, dessen Fläche ist die *Äquatorebene*.

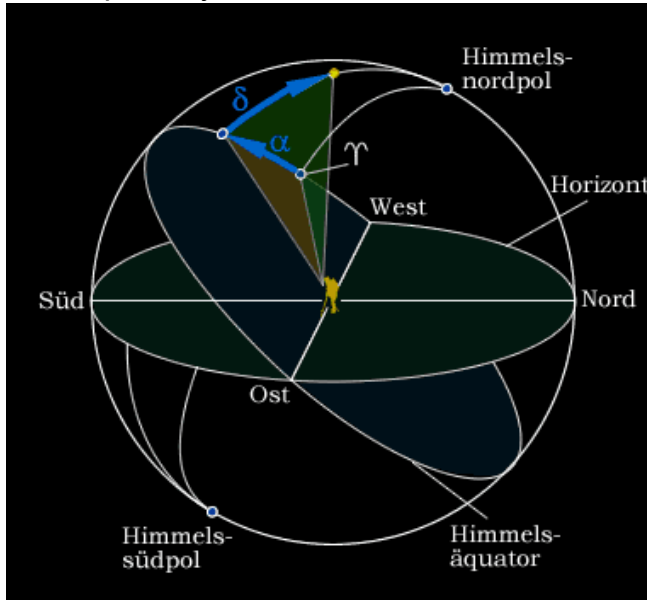


Abb. 4: Das Äquatorsystem von ausserhalb des Systems betrachtet

Die **Rektaszension** ist der Winkel zwischen dem Frühlingspunkt und dem Stundenkreis des Objektes. Sie wird entgegen der scheinbaren Bewegung der Sterne gemessen (W-S-O-N). Der *Frühlingspunkt* ist jener Punkt, an dem sich Ekliptik und Himmelsäquator schneiden. Die *Ekliptik* ist die Ebene der Erdbahn um die Sonne. Gegenüber der Ekliptik ist die Erdachse um 23.5° geneigt. Die **Deklination** entspricht dem Winkel zwischen Objekt und Äquatorebene.

Der durch den Himmelsnordpol und das Objekt verlaufende Grosskreis heisst *Stundenkreis* des Objektes.

Die beiden Koordinaten sind die Rektaszension und die Deklination.

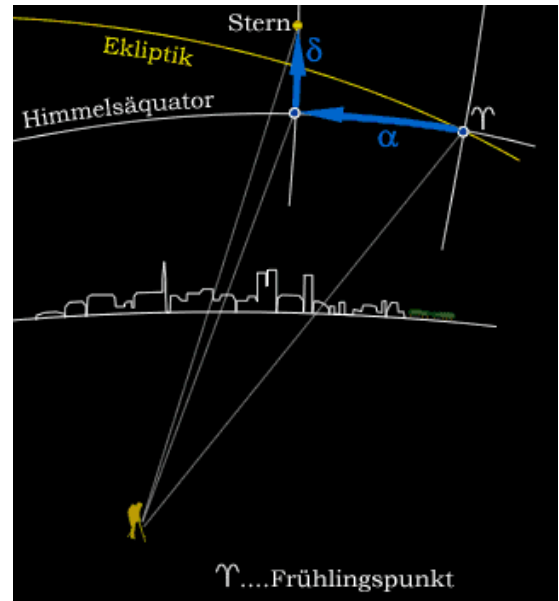


Abb. 5: Das Äquatorsystem aus der Sicht eines erdgebundenen Beobachters

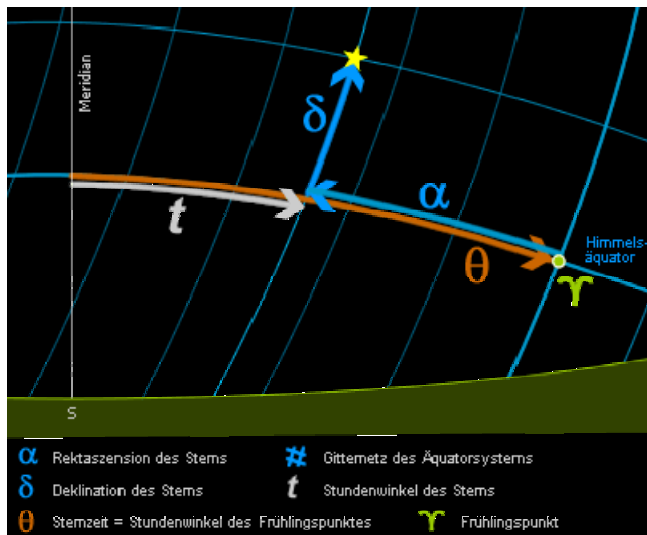


Abb. 6: Darstellung von Rektaszension, Deklination, Stundenwinkel und Sternzeit

Der *Stundenwinkel* t ist der Winkel zwischen Meridian und Stundenkreis des Objektes. Er wird in Richtung der scheinbaren Bewegung der Sonne gemessen. Der Stundenwinkel der Sonne ändert sich mit der Zeit. Dieser ergibt sich aus der wahren Ortszeit WOZ abzüglich 12 Stunden und umgerechnet ins Gradmass. Die *wahre Ortszeit* bezieht sich auf den wahren Stand der Sonne. Sie wird somit von der Sonnenuhr angezeigt. Währenddessen bezieht sich die mittlere Ortszeit auf eine mittlere Sonnenposition, die beobachtet würde, wenn die Erde auf einer perfekten Kreisbahn um die Sonne laufen würde². Wenn die Sonne mittags am höchsten steht, beträgt

² Definition der wahren, bzw. der mittleren Ortszeit:
<http://lexikon.astronomie.info/stichworte/o.html#Ortszeit>

t = 0°, abends um 18.00h wären es ca. 90°.

2.1.2 Berechnung des Sonnenstandes

Dieser Teil der Arbeit hat das Ziel, die Höhe und den Azimut der Sonne für eine bestimmte Tageszeit an einem gewissen Datum bei bekannter geographischer Länge und Breite zu berechnen. Natürlich könnte ich einfach die benötigten Formeln hinschreiben. Doch ich möchte diese auch nachvollziehen können. Auf jeden Fall werde ich den Stand der Sonne nur näherungsweise bestimmen können. Dies hängt damit zusammen, dass die Erde keine geometrische Kugel ist, die Erdbahn gewissen Störungen unterlegen ist, und das Licht der Sonne beim Einfall in die Erdatmosphäre gebrochen wird. All dies zu berücksichtigen würde den Umfang dieser Arbeit sprengen.

Eine weitere vereinfachende Annahme wäre, dass sich die Erde auf einem Kreis um die Sonne bewegte, und dass sie sich in genau 24 Stunden einmal um sich selbst drehte. Die durch diese Annahme resultierenden Abweichungen sind jedoch so relevant, dass ich sie in meinen Berechnungen nicht vernachlässigen will. Diesen Sachverhalt erläutere ich im folgenden Abschnitt über die Zeitgleichung.

Die Zeitgleichung³

Traditionell basiert unsere Zeitrechnung auf dem (scheinbaren) Lauf der Sonne. Erst in moderner Zeit wurden Zonenzeiten und Atomuhren eingeführt. Wenn die Sonne genau im Süden steht, ist es 12 Uhr Mittags (so genannte Ortszeit). Die Zeit zwischen zwei Mittagagen beträgt genau 24 Stunden. Zumindest sollte es so sein, doch gibt es Abweichungen.

Die Erde dreht sich in 23 Stunden und 56 Minuten einmal um ihre eigene Achse. Die restlichen 4 Minuten bis zur Erreichung der vollen Länge des Tages von 24 Stunden erklären sich dadurch, dass wir im Laufe des Tages etwas auf der Umlaufbahn der Erde um die Sonne vorangekommen sind. Deshalb steht die Sonne in einer leicht andern Richtung. Die Erde muss sich noch 4 Minuten (ca. = 24 Stunden / 365) lang weiter drehen, bis für den gleichen Ort die Sonne wieder genau im Süden steht.

Die Neigung der Erdbahn und die leichte Exzentrizität der Erdbahn bewirken, dass die wahre Taglänge (Zeitspanne zwischen Mittag und dem folgenden Mittag) um den Mittelwert 24 Stunden schwankt. Man denkt sich eine mittlere Sonne, die scheinbar entlang des Himmelsäquators mit konstanter Geschwindigkeit läuft. Für einen vollständigen (scheinbaren) Umlauf um den Himmelsäquator benötigt diese mittlere

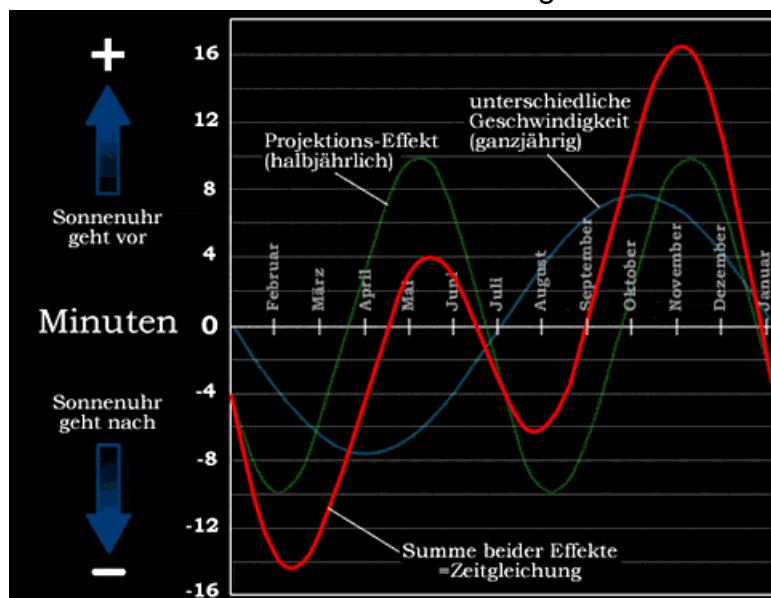


Abb. 7: Die Zeitgleichung - Abweichung der wahren Ortszeit im Vergleich zur mittleren Ortszeit

³ Mit Ausnahme von kleinen Anpassungen ist der Text des Abschnitts "Zeitgleichung" von <http://lexikon.astronomie.info/zeitgleichung/> übernommen

Sonne wie die reale Sonne ein Jahr. Die mittlere Ortszeit bezieht sich auf diese mittlere Sonne.

Eine mechanische (oder elektronische) Uhr läuft gleichmässig: Jeder Tag hat 24 Stunden. Deshalb kann eine solche Uhr nur die mittlere Ortszeit anzeigen. Die wahre Sonne kann im Vergleich zur mittleren Sonne bis zu 15 Minuten zu früh oder zu spät im Süden stehen. Dieser Unterschied wird *Zeitgleichung* genannt. Die Zeitgleichung kann auch als Unterschied zwischen einer die Ortszeit anzeigenden mechanischen Uhr und einer Sonnenuhr verstanden werden.

Die Differenz zu einem gewissen Zeitpunkt ist in der vorangehenden Abbildung ersichtlich.

In einer Formel lässt sich die Zeitgleichung wie folgt ausdrücken:

$$\boxed{\text{Wahre Ortszeit (WOZ)} - \text{Mittlere Ortszeit (MOZ)} = \text{Zeitgleichung} =}$$

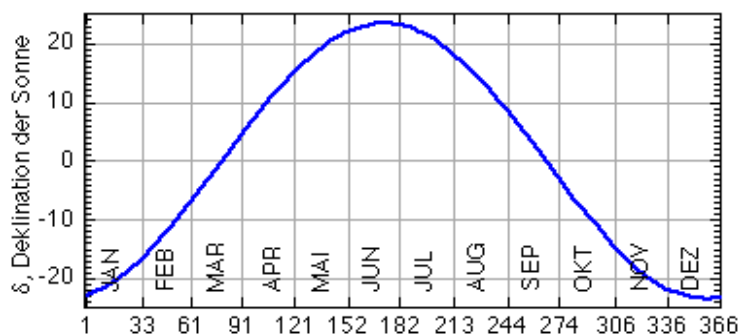
$$\boxed{= -0.1752 \cdot \sin(0.033430 \cdot T + 0.5474) - 0.1340 \cdot \sin(0.018234 \cdot T - 0.1939)}^4$$

Dabei stellt T die Tagnummer dar. Der 1. Januar hat die Nummer 1, der 2. Januar die Nummer 2 usw.

Die oben stehende Formel für die Zeitgleichung (WOZ – MOZ) entstand auf Grund der richtigen Werte für das Jahr 2000. Dadurch sind die Werte zwar nicht mehr direkt durch Eigenschaften der Erdbahn verständlich erklärbar oder herleitbar, doch ist es dadurch eine einfache Formel.

Höhe der Sonne

Als nächstes möchte ich die Höhe der Sonne berechnen. Dafür sind aber zuerst die *Berechnungen der Deklination und die des Stundenwinkels* erforderlich.



Die Deklination der Sonne kann man als einfache harmonische Schwingung darstellen. Im Gegensatz zur Zeitgleichung nehme ich hier die Näherung einer kreisförmigen Erdbahn an.

Abb. 8: Die Deklination der Sonne im Jahreslauf

© R. Brodbeck

⁴ Quelle: Diese Formel wie auch die auf den nächsten Seiten folgenden Formeln für die Deklination, den Stundenwinkel, die Höhe und den Azimut kann man unter <http://lexikon.astronomie.info/zeitgleichung/> nachsehen

$$\text{Deklination } \delta = 23.45^\circ * \sin(360^\circ * ((284+T)/365))$$

Es ist schon eine recht starke Vereinfachung der Deklination, aber für meine Ansprüche genügt diese Formel.

Erläuterungen zur Formel:

23.45° ist die Neigung der Erdachse zur Ekliptik.

365-284 Tage ergibt 80 Tage, was die Zeitspanne zwischen Jahresanfang und der Tag- und Nachtgleiche im März ist. Somit werden in der Klammer (284+T) die Anzahl Tage vom Frühlingspunkt an gezählt.

Für den *Stundenwinkel* t der Sonne gilt grundsätzlich:

$$t = (360^\circ/24h) * (WOZ - 12h)$$

Die *wahre Ortszeit* (WOZ) ist die mittlere Ortszeit (MOZ) plus die Zeitgleichung Z.

$$t = 15^\circ/h * (MOZ + Z - 12h)$$

Zusätzlich muss man die *Differenz zwischen der Zeitzonen-Zeit* und der wahren Ortszeit WOZ berücksichtigen. Die Mittel-Europäische-Zeit MEZ entspricht dem Stand der Sonne auf dem 15. Längengrad. Die mittlere Ortszeit unterscheidet sich von der Zonenzeit MEZ um $(15^\circ - \text{geogr. Länge})/(15^\circ/h)$

$$t = 15^\circ/h * (MEZ - (15^\circ - \text{geogr. Länge})/(15^\circ/h) + Z - 12h)$$

Durch ausklammern ergibt sich

$$t = 15^\circ/h * (MEZ + Z - 12h) - (15^\circ - \text{geogr. Länge})$$

Falls nun *Sommerzeit* (MESZ) herrscht, sollte dies auch in die Gleichung einfließen. Sommerzeit herrscht zwischen dem letzten Sonntag im März und dem letzten Sonntag im Oktober.

MEZ ist MESZ - 1h

$$t = 15^\circ/h * (MESZ + Z - 13h) - (15^\circ - \text{geogr. Länge})$$

Schlussendlich lautet die *Formel für den Stundenwinkel*

bei Winterzeit: $\text{Stundenwinkel } t = 15^\circ/h * (MEZ + Z - 12h) - (15^\circ - \text{geogr. Länge})$

bei Sommerzeit: $\text{Stundenwinkel } t = 15^\circ/h * (MESZ + Z - 13h) - (15^\circ - \text{geogr. Länge})$

Wie kommt man nun von der Deklination und dem Stundenwinkel zur Höhe, unter der der Betrachter die Sonne sieht?

Dazu muss man sich der sphärischen Trigonometrie⁵ bedienen.⁶

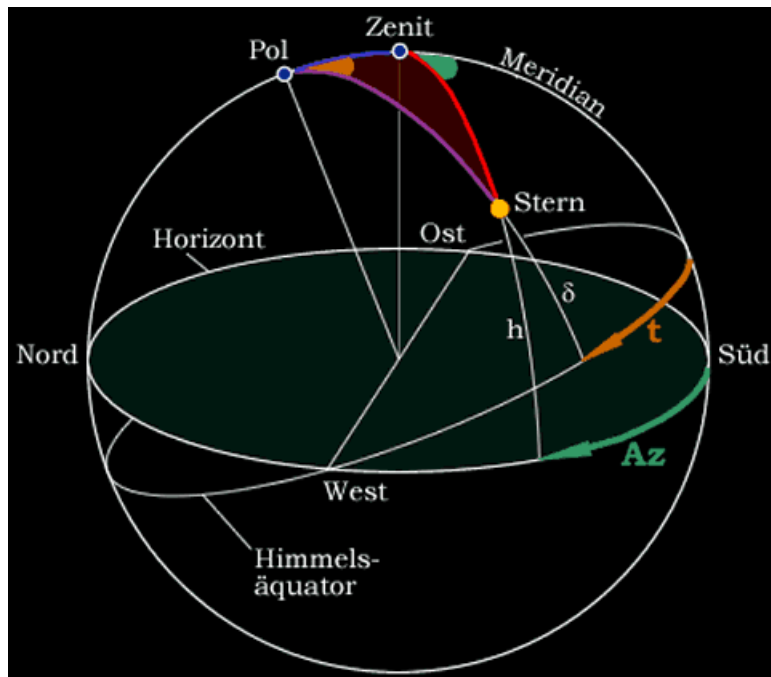


Abb. 9: Die Himmelskugel mit eingezeichnetem sphärischen Dreieck

In diesem Fall wird das *sphärische Dreieck* aus den Eckpunkten Pol/Zenit/Stern gebildet, wie in nebenstehender Skizze zu sehen ist. Die Seitenlängen werden hier natürlich im Winkelmass angegeben. Die Winkel sind zur besseren Übersicht in- und ausserhalb des Dreiecks in derselben Farbe gekennzeichnet. Man kann nun Folgendes erkennen:

Bei dem Winkel am Pol (orange) handelt es sich offensichtlich um den *Stundenwinkel* t des Sterns, Bezugssystem ist das Äquatorsystem.

Der Winkel im Zenit (grün) zwischen dem Meridian und dem Höhenkreis des Sterns ist der *Azimut* Az , natürlich im Horizontsystem gemessen.

Mit diesen beiden Winkeln sowie den "Seitenlängen" des Dreiecks, welche hier, wie gesagt, ebenfalls Winkel sind, kann man dann die Winkelsätze aus der Mathematik zu Hilfe nehmen.

Das Dreieck aus der obigen Zeichnung ist nebenstehend nochmals vergrössert dargestellt. Die "Seitenlängen" sind darin folgende:

Die rote Seite Zenit zu Stern ist die *Zenitdistanz* z , was auch der Komplementärwinkel zur Höhe h des Sterns ist: $z = (90^\circ - h)$.

Die Distanz vom Himmelsäquator bis zum Stern ist ja die *Deklination* δ des Sterns, der Rest ist also der benötigte Winkel von Pol zu Stern = $90^\circ - \delta$ (violett)

Schliesslich ist da noch der Winkel von Pol zu Zenit (blau), welcher den Wert $90^\circ - \omega$ haben muss, da sich der Himmelspol in der Höhe δ über dem Horizont befindet und der Rest zum Zenit der Komplementärwinkel sein muss.

Der Winkel q wird auch *parallaktischer Winkel* genannt, er wird hier nicht weiter benötigt. Jetzt sind alle Grössen bestimmt und man kann mit den Winkelsätzen aus der sphärischen Trigonometrie weiterrechnen:

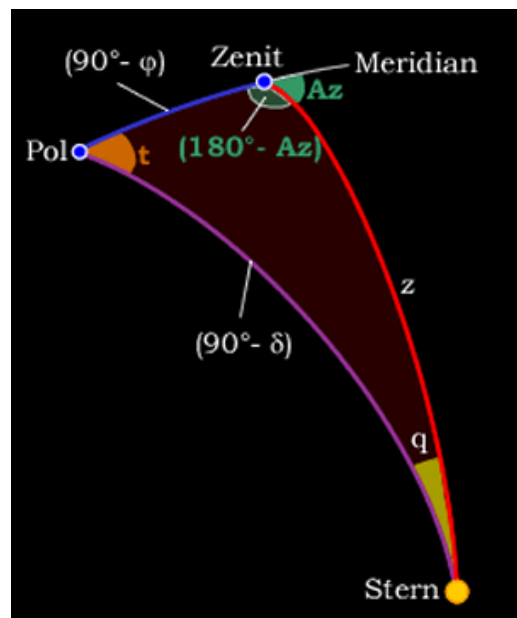


Abb. 10: Das sphärische Dreieck

⁵ Die sphärische Trigonometrie ist ein Teilgebiet der sphärischen Geometrie (Kugelgeometrie). Sie befasst sich hauptsächlich mit der Berechnung von Seitenlängen und Winkeln in Kugeldreiecken.

⁶ Mit Ausnahme von kleinen Anpassungen ist der Text ab dem Verweis zur Fussnote bis und mit zur Herleitung des Azimuts von http://www.greier-greiner.at/hc/sph_dreieck.htm übernommen.

Sinussatz	$\sin(a) \sin(\beta) = \sin(\alpha) \sin(b)$
Seiten-Kosinussatz	$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\alpha)$
Sinus-Kosinussatz	$\sin(a) \cos(\beta) = \cos(b) \sin(c) - \sin(b) \cos(c) \cos(\alpha)$
Winkelkosinussatz	$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \cos(a)$
Polarer Sinus-Kosinussatz	$\sin(\alpha) \cos(b) = \cos(\beta) \sin(\gamma) + \sin(\beta) \cos(\gamma) \cos(a)$

Auf die Herleitung und Erklärung dieser Sätze verzichte ich, da dies erstens den Umfang dieser Arbeit sprengen würde und zweitens, weil ich nicht über die dafür notwendigen mathematischen Kenntnisse verfüge.

Die einzige Festlegung ist jetzt, dass die "Seiten" mit der Bezeichnung a, b, c immer jeweils den Winkeln, α , β , γ gegenüberliegen und umgekehrt. Welche Winkel man, α , β , γ und welche Seiten man a, b, c nennt, spielt keine Rolle. Ich mache es einmal auf folgende Art:

1. Annahme:

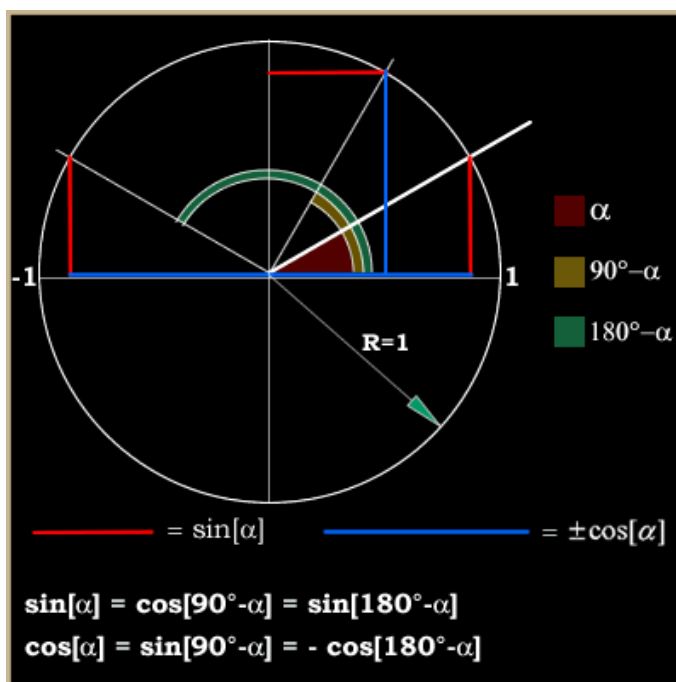
Winkel $\alpha = (180^\circ - Az)$ Seite a = $(90^\circ - \delta)$

Winkel $\beta = t$ Seite b = z

Winkel $\gamma = q$ Seite c = $(90^\circ - \varphi)$

Diese Annahmen in den Sinus-Kosinussatz eingesetzt ergeben:

$$\sin(90^\circ - \delta) \cos(t) = \cos(z) \sin(90^\circ - \varphi) + \sin(z) \cos(90^\circ - \varphi) \cos(Az)$$



Unter Berücksichtigung der Winkelverhältnisse am Einheitskreis, der Sinus eines Winkels α ist gleich dem Kosinus des Komplementärwinkels $(90^\circ - \alpha)$ bzw. im Fall des Supplementärwinkels $(180^\circ - \alpha)$, erhält man für den Sinus dasselbe und für den Kosinus den negativen Wert.

Abb. 11: Winkelverhältnisse am Einheitskreis

Setzt man jetzt diese Zusammenhänge ein, ergibt sich:

$$\cos(\delta) \cos(t) = \sin(z) \sin(\varphi) \cos(Az) + \cos(z) \cos(\varphi)$$

Mit dem Seiten-Kosinussatz unter derselben Annahme erhält man

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(z) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(z) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - Az)$$

und nach Auflösung der Winkelzusammenhänge:

$$\sin(\delta) = \cos(z) \sin(\varphi) - \sin(z) \cos(\varphi) \cos(Az)$$

Um eine dritte brauchbare Gleichung zu erhalten, stellt man zu einer 2. Annahme um: (a, b bzw. α , β vertauscht)

<i>Winkel</i> $\alpha = t$	<i>Seite</i> $a = z$
<i>Winkel</i> $\beta = (180^\circ - Az)$	<i>Seite</i> $b = (90^\circ - \delta)$
<i>Winkel</i> $\gamma = \varphi$	<i>Seite</i> $c = (90^\circ - \varphi)$

und erhält mit dem Sinussatz:

$$\sin(z) \sin(180^\circ - Az) = \sin(t) \sin(90^\circ - \delta)$$

und nach Umformung schliesslich:

$$\sin(z) \sin(Az) = \sin(t) \cos(\delta)$$

Mit dem 2. Ansatz geht man gleich vor wie mit dem 1. Ansatz. Man verwendet dieselben Formeln. Für die Gleichung mit dem Sinussatz erhält man dasselbe Ergebnis wie gerade eben.

Mit dem Sinus-Kosinussatz ergibt sich unter der 2. Annahme die Beziehung:

$$\sin(z) \cos(Az) = \cos(\delta) \sin(\varphi) \cos(t) - \sin(\delta) \cos(\varphi)$$

und mit dem Seiten-Kosinussatz ergibt sich unter der 2. Annahme die Beziehung:

$$\cos(z) = \sin(\delta) \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(t)$$

Da $z = (90^\circ - h)$ und $\cos(z) = \sin(90^\circ - z)$, ergibt sich:

$$\cos(z) = \sin(h)$$

$\text{Die Höhe } h \text{ entspricht also } \sin^{-1}(\sin(\delta) \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(t))$

Dabei gilt:

δ = Deklination

φ = geographische Breite

t = Stundenwinkel

Der Azimut

Jetzt fehlt noch die zweite Koordinate für die Angabe des Sonnenstandes, nämlich der *Azimut*. Dieser ist nun einfach zu berechnen, da mit der Herleitung der Höhe schon praktisch die gesamte Vorarbeit geleistet wurde.

Es gilt ja:

$$\sin(z) \sin(Az) = \sin(t) \cos(\delta)$$

$$\text{Da } \cos(z) = \sin(90^\circ - z) \rightarrow \cos(z) = \sin(h)$$

ergibt sich:

$$\cos(h) \sin(Az) = \sin(t) \cos(\delta)$$

Die Auflösung nach Az gibt nun:

$$\text{Azimut } Az = \sin^{-1}(\sin(t) \cos(\delta) / \cos(h))$$

Zur Überprüfung erstellte ich ein einfaches Excel-Programm, das durch Eingabe der Zeit- und Koordinatenangaben den Stand der Sonne errechnete (siehe Anhang). Dabei machten mich jedoch einige Resultate stutzig:

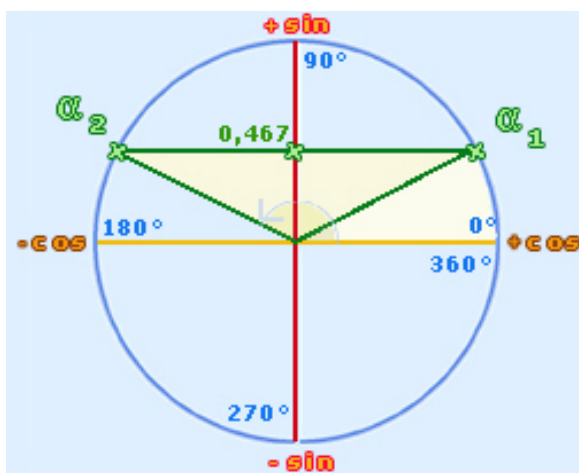
Die Berechnung des Azimut für den 10. Okt, 46°33' Nord und 07°58' Ost ergab für

19:30h einen Wert von **87.45°**

19:45h einen Wert von **89.83°**

20:00h einen Wert von **87.09°**

Wären diese Resultate richtig, würde das bedeuten, dass die Sonne um 20:00h weiter südlich stünde als um 19:45h. Dies ist einfach unmöglich.



Wo liegt nun der Fehler? Dazu muss man den Einheitskreis betrachten. In nebenstehendem Beispiel hat der Sinus einen Wert von 0.467. Um zu einer Winkelangabe in Grad zu gelangen, muss man den Arc-Sinus benutzen. Gibt man $\sin^{-1}(0.467)$ in den Taschenrechner ein, erhält man den Wert 27.84°. Dies ist auch richtig. Doch auch der Sinus von 152.16° ergibt 0.467. Ein Sinus-Wert kann also zwei verschiedene Winkel α ergeben. Es bräuchte eine Fallunterscheidung.

Abb. 12: Einheitskreis

Doch für die Zeiten, in denen das Schattenkreuz zu sehen ist, ergibt auch die obige (Azimut-) Formel das richtige Resultat. Deshalb verzichte ich an dieser Stelle auf weitere Ausführungen bzgl. der Fallunterscheidung. Es sei einfach erwähnt, dass obige Formel für Azimut $> 90^\circ$ nicht stimmt.

Praktische Berechnung des Sonnenstandes



Abb. 13: 08.10.2006, 17:51h



Abb. 14: 08.10.2006, 18:19h



Abb. 15: 08.10.2006, 18:52h

Der 08. Oktober liegt noch innerhalb der Sommerzeit. Die Koordinaten für die Jungfrau betragen $46^{\circ}33'$ Nord und $07^{\circ}58'$ Ost.

Unter welchem *Höhenwinkel* war nun zu diesen Zeitpunkten die Sonne zu sehen?

Hier sind zur Übersicht nochmals alle Gleichungen aufgelistet:

$$\text{Höhe } h = \sin^{-1}(\sin(\delta) \sin(\varphi) + \cos(\delta) \cos(\varphi) \cos(t))$$

$$\text{Deklination } \delta = 23.45^{\circ} * \sin(360^{\circ} * ((284+T)/365))$$

$$\text{Stundenwinkel } t = 15^{\circ}/h * (\text{MESZ} + \text{Zeitgleichung} - 13h) - (15^{\circ} - \text{Länge})$$

$$\text{Zeitgleichung} = -0.1752 * \sin(0.033430 * T + 0.5474) - 0.1340 * \sin(0.018234 * T - 0.1939)$$

Setzt man nun die entsprechenden Zahlen in die Gleichungen ein, ergeben sich folgende Resultate für 17:51h.

Der 08. Oktober entspricht dem 281. Tag im Jahr. Somit ist $T = 281$ und

$$\text{Deklination } \delta = 23.45^{\circ} \sin(360^{\circ} * ((284+281)/365)) = -6.96^{\circ}$$

$$\text{Zeitgleichung} = -0.1752 * \sin(0.033430 * 281 + 0.5474) - 0.1340 * \sin(0.018234 * 281 - 0.1939) = 0.2174 \text{ h} = 13 \text{ min}$$

$$\text{Stundenwinkel } t = 15^{\circ}/h * (17.85h + 0.2174h - 13h) - (15^{\circ} - 7.967^{\circ}) = 68.98^{\circ}$$

$$\text{Höhe } h_{17:51} = \sin^{-1}(\sin(-7.72^{\circ}) \sin(46.55^{\circ}) + \cos(-7.72^{\circ}) \cos(46.55^{\circ}) \cos(77.11^{\circ})) = 9.03^{\circ}$$

Analog dazu kann man die Sonnenhöhe für 18:19h und 18:52h ausrechnen.

$$\text{Höhe } h_{18:19} = 4.44^{\circ}$$

$\text{Höhe } h_{18:52} = -1.10^{\circ}$ (Dieser negative Wert sieht zwar etwas komisch aus, doch ich erkläre ihn mir damit, dass die Jungfrau 4000m hoch ist, während der Horizont, über dem die Sonne untergeht, vielleicht auf 1000m oder 2000m liegt und/oder meine Berechnungen etwas ungenau sind)

Die Rechnung für den *Azimut* ergibt:

$$\text{Azimut } Az = \sin^{-1}(\sin(t) \cos(\delta) / \cos(h))$$

$$\text{Azimut}_{17:51} = \sin^{-1}(\sin(68.98^\circ) \cos(-6.96^\circ) / \cos(9.03^\circ)) = \underline{\underline{69.75^\circ}}$$

wiederum analog dazu rechnet man den Azimut für 18:19h und 18:52h aus.

$$\text{Azimut}_{18:19} = \underline{\underline{75.00^\circ}}$$

$$\text{Azimut}_{18:52} = \underline{\underline{81.03^\circ}}$$

Damit man das Schattenkreuz erkennen kann, darf die Sonne maximal 9° über dem Horizont stehen mit einem Azimut von 70° (West-Süd-West). Das andere Ende der Bandbreite, in der man das Schattenkreuz sieht, liegt bei Höhe = -1° und Azimut = 81°. Am „schönsten“ sieht man das Kreuz jedoch, wenn die Winkelkombination für Höhe = 4° und Azimut = 75° ist.

Der Vergleich mit Berechnungen im Internet ist befriedigend. So errechnet das Programm von Calsky⁷ für dieselben Eingabedaten um 18:19h eine Höhe von 6.66° und einen Azimut von 254.24° bzw. (254.24°-180°) = 74.24°. Die Abweichungen von diesen genauen Berechnungen im Vergleich zu meinen betragen für die Höhe gut 2°, während beim Azimut eine Abweichung von 0.76° resultiert. Zum Vergleich: 1° entspricht etwa zweimal dem „Durchmesser“ der Sonne.

Die Abweichungen kommen insbesondere daher, dass auf jener Page die Deklination genauer berechnet wird (= - 6.00° statt -6.96°) und dass die Brechung des Lichts durch die Erdatmosphäre Berücksichtigung findet. Die Refraktion⁸ macht zu diesem Zeitpunkt für die Höhe der Sonne etwa +0.13° Grad aus.

Im Anhang befindet sich eine Gegenüberstellung von meinen Berechnungen mit jenen von Calsky. Die durchschnittliche Differenz beträgt für die Höhe wie auch für den Azimut weniger als 0.4°.

⁷ Calsky = <http://www.astronomie.info/calsky/Sun/index.html/1>

⁸ Die Refraktion ist die Brechung des Lichts

2.2 Geographische Gegebenheiten

Die zweite wichtige Einflussgrösse, die zur Entstehung des Schattenkreuzes führt, sind die geographischen Gegebenheiten des Jungfrau-Gebiets.

Ich überlegte mir, wie diese am besten dargestellt werden könnten. Zum einen gibt es Landeskarten, die dieses Gebiet darstellen, zum anderen können zur Betrachtung auch Photographien herangezogen werden. Doch beide Möglichkeiten besitzen einen gewichtigen Nachteil: Sie sind nur zweidimensional. Die Lösung dieses Problems ist eine 3D-Darstellung. Also entschied ich mich ein Modell der Jungfrau zu bauen, damit ich die dortige Gebirgsform darstellen und analysieren konnte.

2.2.1 Bau eines Modells der Jungfrau

Die Herstellung dieses Jungfrau-Modells hat das Ziel, dass ich dann mit einer Lichtquelle das Schattenkreuz erzeugen kann. Somit besteht die Möglichkeit, den zur Entstehung des Schattenkreuzes benötigten Stand der Sonne auf eine praktische Art und Weise herauszufinden.

Mit diesem Experiment will ich die im vorangegangenen Kapitel erläuterten Berechnungen überprüfen.

Beim Bau eines solchen Reliefs stellt sich zuerst einmal die Frage, welche Dimensionen das Projekt annehmen sollte. Bei einem grösseren Modell beeinträchtigen kleine Unstimmigkeiten das Gesamtbild weniger, als wenn das Modell in einem kleineren Massstab (z.B. 1:75'000) gebaut wird. Es ist somit auch einfacher herzustellen, bzw. es gibt weniger Kleinstarbeiten.

Auf der anderen Seite nimmt das Modell bei einem grösseren Massstab (z.B. 1:2000) relativ schnell grosse Ausmasse an. Dies hat zur Folge, dass das Modell unhandlich wird und viel Platz zur Aufbewahrung benötigt. Zudem sind auch die daraus zusätzlich entstehenden Materialkosten nicht zu unterschätzen.

Es musste also ein Kompromiss gefunden werden, der die verschiedenen Punkte wie die Genauigkeit, die Handlichkeit sowie das Kosten-Nutzen-Verhältnis angemessen berücksichtigt.

In einer ersten Phase rechnete ich aus, welche Grössen das Modell bei einem bestimmten Massstab annehmen würde. In Natura entspricht das darzustellende Gebiet etwa einer Fläche von ca. 2 km x 2.8 km. Im Anhang ist das im Modell dargestellte Gebiet auf einer Landeskarte eingezeichnet. Die südwestliche Eckkoordinate des Modells beträgt 638'150/153'970, jene der nordöstlichen Ecke 640'920/156'000⁹. Der Höhenunterschied des dargestellten Gebiets ist ca. 1'860m. Somit ergeben sich folgende Masse:

Massstab	Modellhöhe	Breite	Länge
1:3'000	62 cm	67 cm	92 cm
1:4'000	47 cm	51 cm	69 cm
1:5'000	37 cm	40 cm	55 cm

Abb. 16: Gegenüberstellung der Modellmasse bei unterschiedlichem Massstab

Ein Modell, das gut 90 cm lang würde (Massstab 1:3000), schien mir etwas übertrieben, da dies doch einen beträchtlichen Materialaufwand nach sich gezogen hätte. Beim Massstab 1:5'000 befürchtete ich jedoch, dass das Schattenbild zu ungenau

⁹ Angaben im Kilometerkoordinatensystem der Schweiz

ausfallen könnte und zuviel Kleinstarbeit anfiel. Also entschied ich mich für den Massstab 1:4000.

Nun galt es, die zum Bau notwendigen kartografischen Grundlagen zu beschaffen. Ich war glücklicherweise in der Lage, dass mir mein Grossvater, Martin Lips, einen 1:4000er Plan dieser Region zur Verfügung stellen konnte. Dies war möglich, da er jahrelang ein Vermessungsbüro geführt und in diesem als Ingenieur-Geometer gearbeitet hat.

Ich wollte mein Modell nach folgender Art bauen: Ich sägte Holzplatten den Höhenlinien entlang aus und nagelte oder leimte die daraus entstehenden Flächen aufeinander. Ein solches Modell nennt man Schichtstufen- oder Treppenstufenrelief¹⁰. In einem 1:4000er Plan ist die Äquidistanz¹¹ 10m. Bei einem dargestellten Höhenunterschied von 1'860m ergäbe dies 186 Platten à 2.5mm. Zum einen erschien mir die Zahl von 186 Platten ziemlich gross und zum anderen ist 2.5mm dickes Holz relativ teuer und nicht ganz einfach zu verarbeiten. Deshalb entschied ich mich, nur von jeder zweiten Höhenkurve eine Platte auszuschneiden. Dafür mussten diese natürlich doppelt so dick sein (5mm), damit keine negative Überhöhung des Modells stattfand. Da ich somit nur die halbe Anzahl an Platten auszusägen brauchte, sparte dies zum einen viel Zeit, zum anderen senkten sich dadurch auch die Materialkosten.

Als nächstes stellte sich die Frage, welches Material ich verwenden wollte. Für mich war klar, dass ich das Modell aus Holz bauen würde, deshalb, weil in unserem Haus eine Schreinerei eingegliedert ist, die mein Vater mehrere Jahre lang führte. Ich wusste nur noch nicht, welche Holzart ich verwenden sollte. Mein Vater riet mir MDF-Platten (Mitteldichtfaserplatten) zu verwenden. Zum einen hat das den Vorteil, dass diese Platten grössere Ausmasse (245 cm x 210 cm) haben als Massivholzbretter. Damit ist auch der Verschnitt geringer. Zum anderen weisen sie keine Faserung auf. Somit reisst das Holz beim Aussägen weniger aus als es das zum Beispiel bei der Verwendung von Lindenholz täte. Auch sind diese Platten preiswerter.

Die Platten mussten zuerst in 50.8 cm breite Streifen geschnitten werden, damit sie die Breite des Modells hatten. Pro Platte ergaben das also 4 Streifen. Als nächstes schnitt ich die Platten auf die Länge des Modells zu, was 69.6 cm betrug. Somit erhielt ich pro Streifen 3 kleinere Platten. Total benötigte ich 66 solcher kleiner Platten, die der Grundfläche des Modells entsprachen. Dies bedeutete, dass ich 6 grosse Platten bestellen musste. Ab der Höhe von 3620 m konnte ich dann die „Höhenflächen“ aus den vorher angefallenen Resten ausschneiden.



Abb. 17: Übertragung der Höhenlinien auf die Holzplatten

¹⁰ Eduard Imhof, Bildhauer der Berge, S. 143

¹¹ Die Äquidistanz ist die Höhendifferenz zwischen zwei Höhenlinien



Abb. 18: Aussägen der Platten mit dem Decoupiersägel

Der nächste Schritt war die Übertragung der Höhenkurven auf das Holz. Dazu befestigte ich den Plan mit Nägeln auf dem Holz. Danach legte ich ein Durchschlagspapier zwischen die beiden Ebenen und fuhr dann mit einem Kugelschreiber einer Höhenlinie entlang. Ab der Höhe von 3900m musste ich für jede Ebene auch noch zwei Referenzpunkte markieren, damit am Schluss die Platten genau aufeinander passten. Die tiefer liegenden Platten konnten auf Grund der geraden Ränder ausgerichtet werden.

Der nächste Arbeitsschritt war das Ausschneiden der Platten. Ich bewerkstelligte das mit einer Decoupiersäge. Eine Decoupiersäge ist im Prinzip ein elektrisch angetriebenes „Laubsägel“. Trotzdem war das Aussägen ein sehr zeitintensiver Arbeitsgang; mussten doch insgesamt 86 Ebenen ausgeschnitten werden. Insgesamt benötigte ich für das Aussägen gut 11 Stunden. Ebenso viel Zeit nahm für das Anzeichnen in anspruch. Zudem bohrte ich durch die Referenzpunkte ein kleines Loch, damit ich die Platten später gut ausrichten konnte.

Endlich hatte ich alle Platten ausgesägt und aufeinander gelegt. Ich hatte nun ein massives Modell. Es wog knapp 80 kg, was aber definitiv zu viel war. Also hohlte ich das Modell aus. Dazu bohrte ich ein Loch in eine Platte und sägte dann das Innere der Platte mit einer Stichsäge aus.



Abb. 19: Modell mit hohlem Innenraum



Abb. 20: Die Stichsäge, mit der ich das Innere der Platten aussägte

Wie auf der vorangegangenen Seite zu sehen ist, spannte ich zum Aus-sägen die Stichsäge in einen Schraubstock. Ich liess überall einen Rand von mindestens 5 cm stehen. Durch das Aushöhlen war das Modell wesentlich leichter geworden. Es wog jetzt noch gut 30 kg.



Abb. 21: Das aufeinander Nageln der Platten mit Hilfe eine Pressluft-Nagelpistole

Nun mussten die ausgesägten Ebenen aufeinander fixiert werden. Nachdem ich Platte für Platte ausgerichtet hatte, befestigte ich die Platten mit einer Pressluft-Nagelpistole aufeinander. Ich zog das Nageln dem Leimen vor, da dies meiner An-



Abb. 22: Das Modell bevor es weiss gespritzt wurde

sicht nach stabiler und praktischer war. Jetzt war mein Modell bezüglich seiner Form fertig gestellt.

Ich überlegte mir noch, ob ich die Räume zwischen den Höhenkurven mit Gips, Kitt oder einer anderen Füllmasse ausfüllen wollte, damit die Treppenform verschwand. Dazu machte ich vorab ein zusätzliches Minimodell mit nur 8 Ebenen,

an dem ich dieses Verfahren zuerst erproben wollte. Ich strich eine Füllpaste, die zuerst in Wasser gelöst wurde auf das Holz auf und liess daraufhin das Modell trocknen. Schon bald stellte ich aber fest, dass sich dadurch das Holz stark verbog. Also verzichtete ich beim grossen Modell darauf, die Zwischenräume auszufüllen.



Abb. 23: Das fertige Jungfrau-Modell

Der vorletzte Arbeitgang war jetzt noch das Spritzen des Modells, damit es in weisser Farbe erschien. Ich entschied mich aus ästhetischen Gründen dafür, da die Jungfrau eher ein weisser und kein brauner Berg ist. Als abschliessender Arbeitsschritt erfolgte noch das Abschleifen der Seiten des Modells, damit diese wieder braun wurden und die kleinen Übergänge zwischen den einzelnen Platten verschwanden. Nun konnte die Experimentierphase beginnen.

2.2.2 Experimente mit dem Modell

In diesem Abschnitt erläutere ich meine durchgeführten Versuche mit dem Modell der Jungfrau.

Zuerst stellte ich mir die Durchführung der Experimente so vor, dass ich eine Lichtquelle korrekt auf das Modell ausrichten würde. Als es aber dann darum ging, was für eine Lichtquelle das sein sollte und wie die Experimente abzulaufen hätten, wurde mir die ganze Sache etwas zu aufwändig. Schliesslich beschloss ich, statt die Lichtquelle auszurichten, das Modell in die richtige Position zu stellen und als Lichtquelle die Sonne zu benutzen. Der Vorteil war, dass es nicht extreme Halbschatten gab und die Messungen der Winkel relativ einfach waren.



Abb. 24: Hilfskonstruktion zur Herstellung des Neigungswinkels

Die Ausrichtung des Modells, bezogen auf die Himmelsrichtungen, bzw. auf den Azimut, konnte ich durch einfaches Drehen bewerkstelligen.

Da die Sonne den grössten Teil des Tages zu hoch am Himmel steht, um das Schattenkreuz erscheinen zu lassen und ich nicht stets darauf warten wollte, bis die Sonne unter dem richtigen Höhenwinkel stand, bastelte ich nebenstehende Hilfskonstruktion, um dem Modell die richtige Neigung geben zu können.

Die nachfolgenden Aufnahmen entstanden am 20. April 2006 zwischen 17:45h und 18:00h bei mir zu Hause.



Abb. 25: Experiment mit dem Jungfrau-Modell – 20. April 2006, 17:45h

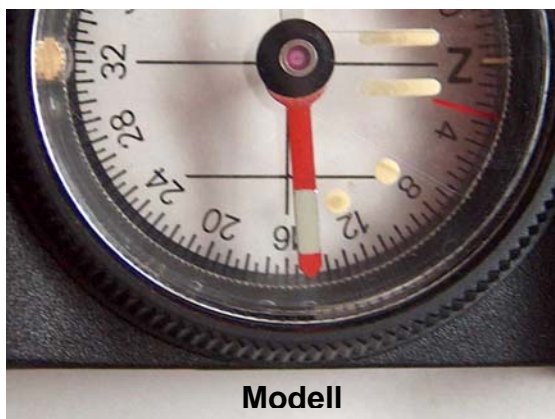


Abb. 26: Die Ausrichtung des Modells betrug 94° (Richtung Westen)



Abb. 27: Die Neigung des Modells betrug 22.6°

Die Ausrichtung des Modells mass ich mit einer digitalen Wasserwaage und einem Kompass. Dabei ergab die Messung für die Neigung 22.6° . Den Kompass legte ich parallel zur Seite des Modells. Die Kompassnadel zeigte etwas mehr als 15 an, was in Grad umgerechnet 86° ergibt. Wenn Süden = 0° und Westen = 90° , hatte das Modell eine Ausrichtung von 94° .



Abb. 28: Die Versuchsanordnung: Rechts die senkrecht stehende Wasserwaage, in der Mitte das ausgerichtete Modell

Als zusätzliches Experiment stellte ich die Wasserwaage senkrecht auf den Boden. Dadurch ergab sich ein Schattenwurf. Da die Länge des Schattens (2.08m) und die Länge der Wasserwaage (1.00m) bekannt waren, lässt sich mit dem Tangens daraus der Höhenwinkel der Sonne berechnen.

$$h = \tan^{-1}(1\text{m}/2.08\text{m}) = 25.7^\circ$$

Dabei ist zu erwähnen, dass die Berechnung der Höhe für den 20. April, 17:45h



Abb. 29: Der Winkel zwischen dem Schattenwurf der Wasserwaage und der Ausrichtung des Modells beträgt 15°

25.5° ergibt. Dies ist somit eine nahezu perfekte Übereinstimmung. Wenn man nun die Differenz zwischen der Schrägstellung des Modells und dem Stand der Sonne ausrechnet, ergibt das $25.7^\circ - 22.6^\circ = 3.1^\circ = h$

Dieses Resultat bestätigt die Berechnungen des Kapitels 2.1.2.

Zur Bestimmung der südlichen Ausrichtung des Schattens nahm ich wieder den Kompass zu Hilfe. Er zeigte für die Ausrichtung des Schattens einen Winkel von 79° an. Die Sonne stand also unter einem Azimutwinkel von 79°. Auch hier zeigt sich wieder eine nahezu perfekte Übereinstimmung mit den Berechnungen. Jene ergaben für den 20. April, 17.45h einen Winkel von 79.0°.

$$\text{Der gelb markierte Winkel entspricht } 94^\circ - 79^\circ = 15^\circ = \alpha'$$

In nachfolgender Grafik sind die Winkelverhältnisse zwischen dem Stand der Sonne und der Ausrichtung des Modells, bzw. der realen Jungfrau eingezeichnet. Dabei kann man schön erkennen, dass der benötigte Winkel zwischen Azimut der Sonne und der Ausrichtung des Modells 15° beträgt. Auf diesen Wert kommt man sowohl durch Berechnungen als auch auf experimentellem Weg.

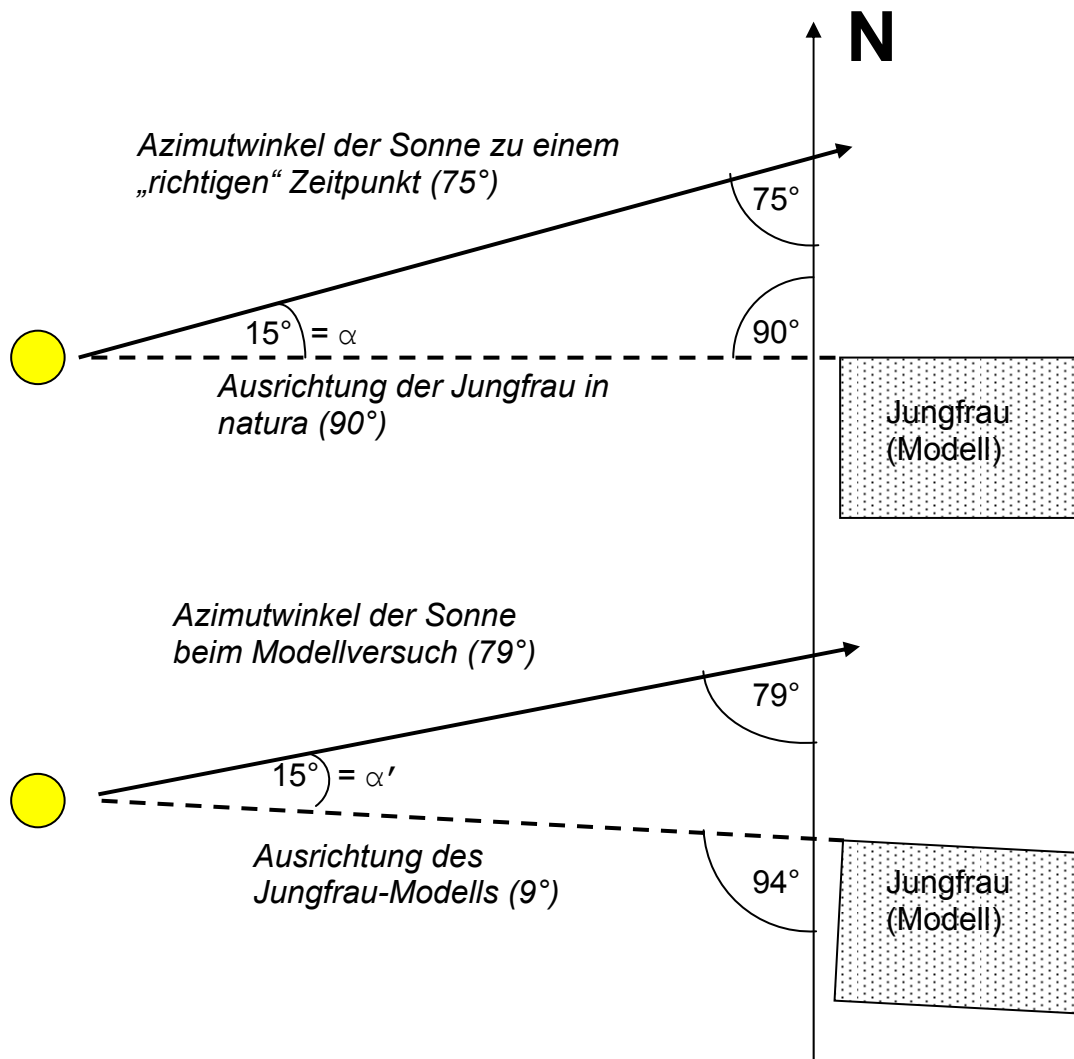


Abb. 30: Darstellung der Winkelverhältnisse von Sonne und der Ausrichtung des Modells beim Versuch

Die Resultate der Experimente bestätigen die Berechnungen des Kapitels 2.1. Der Winkel zwischen dem Stand der Sonne und der Ausrichtung des Modells, bzw. zwischen der realen Jungfrau, beträgt 15° . Für den Höhenwinkel gilt dieselbe Feststellung bzgl. der Übereinstimmung; der Winkel beträgt dabei ca. 3° - 4° .

2.2.3 Gebirgsformen, die das Schattenkreuz verursachen

Nun fehlt noch die Identifikation der Gebirgsformen, die den Schatten verursachen. Diese Gebirgskanten identifizierte ich, indem ich einen Grashalm, wie auf den Bildern zu sehen ist, auf das Modell legte. Rot eingekreist ist der aus dem Grashalm entstandene Schatten. Blau eingekreist ist die schattenverursachende Kante. Im Fall der Abbildung links verursacht der auf 3695 m liegende flache Gipfelgrat des Silberhorns die obere horizontale Linie des Kreuzes. Bei der rechten Abbildung ist der Grat blau eingekreist (die so genannte Lauperroute), der für die linke und rechte Begrenzung des oberen Teils des Kreuzes verantwortlich ist.

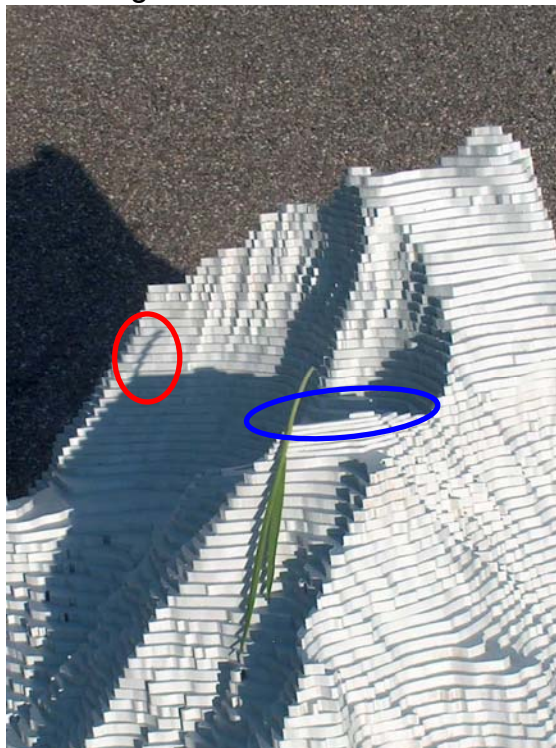


Abb. 31: Der flache Gipfelgrat des Silberhorns verursacht die obere horizontale Linie des Kreuzes

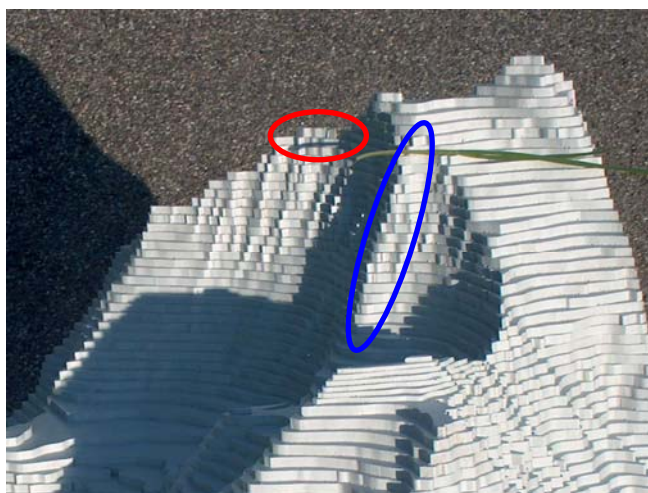


Abb. 32: Die so genannte "Lauperroute" ist für den oberen senkrechten Balken des Kreuzes verantwortlich

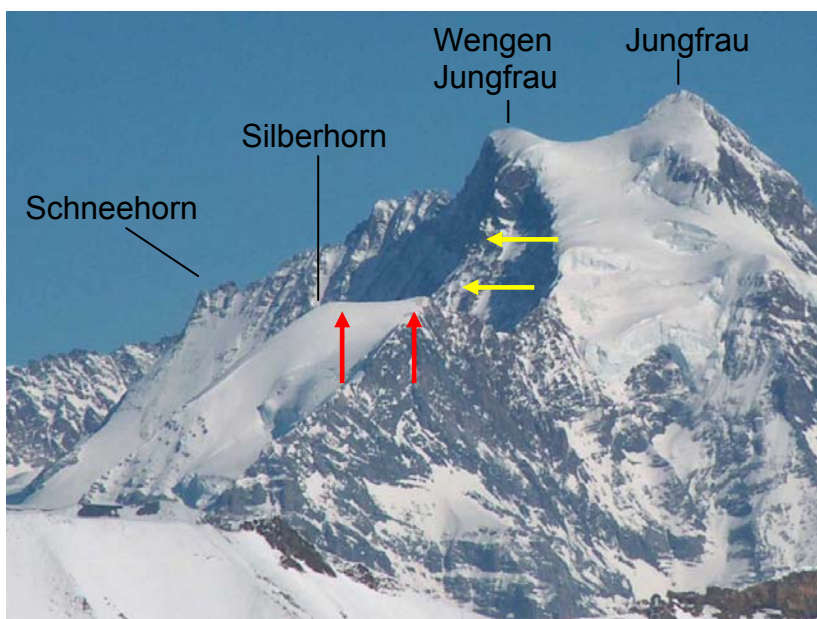


Abb. 33: Aufnahme der Jungfrau vom Elsighorn aus, 18.03.2006

Nebenstehend ist die Jungfrau aus einer ähnlichen Perspektive aufgenommen wie das Modell in den Abbildungen 28 und 29. Die gelben Pfeile zeigen auf die Lauperroute, die roten auf den Silberhorngrat.

2.3 Beobachtung der Jungfrau

2.3.1 Beobachtung des Schattenkreuzes am 08.10.2006

Die Idee, meine Matura-Arbeit zu diesem Thema zu schreiben, kam mir im Herbst 05 auf einem Familienausflug auf die Mänziwilegg (zwischen Oberburg und Biglen). Da man von dort aus das Schattenkreuz sehr gut sah, ging ich dieses Jahr mit einer Kamera ausgerüstet wieder dorthin und machte während gut einer Stunde Aufnahmen von der Entwicklung des Schattens in der Jungfrau. Dabei beträgt die Zeitspanne zwischen den einzelnen Aufnahmen 4 - 6 Minuten.

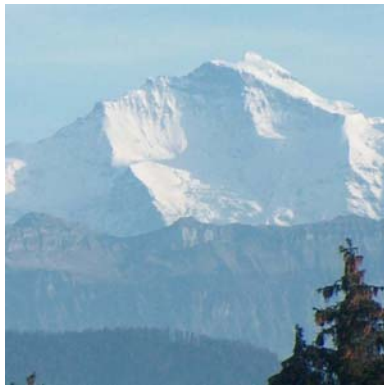


Abb. 34: 17:38

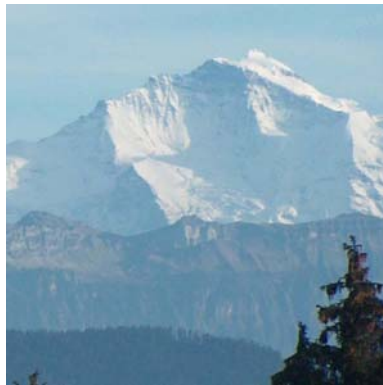


Abb. 35: 17:42

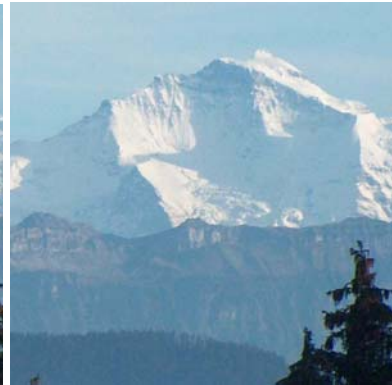


Abb. 36: 17:48

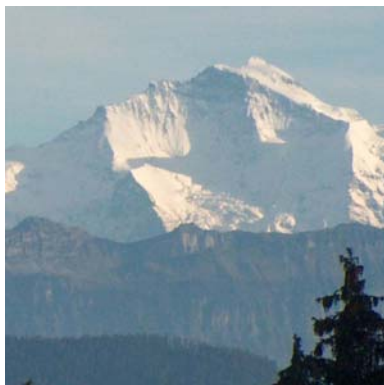


Abb. 37: 17:52

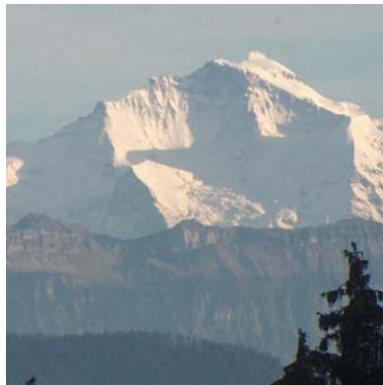


Abb. 38: 17:57



Abb. 39: 18:01

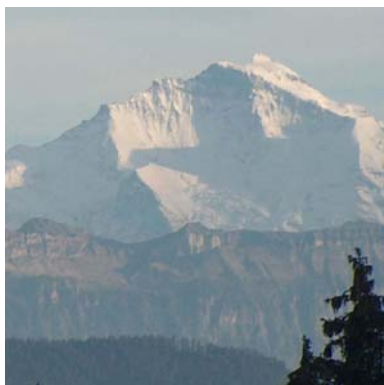


Abb. 40: 18:05

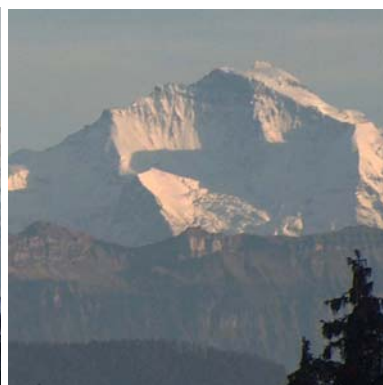


Abb. 41: 18:10

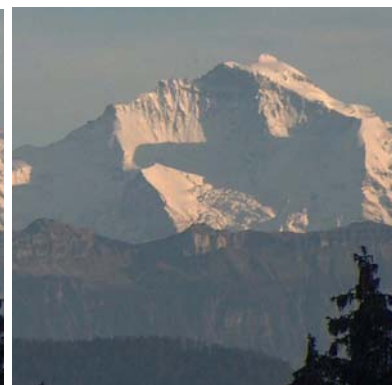


Abb. 42: 18:14



Abb. 43: 18:19

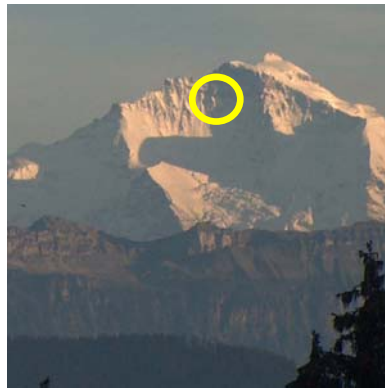


Abb. 44: 18:23



Abb. 45: 18:28

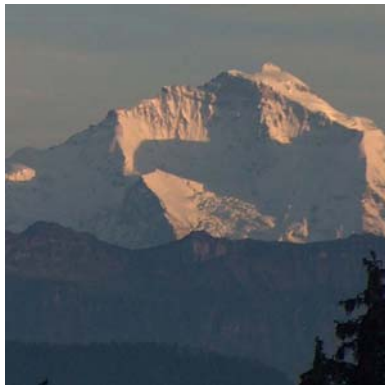


Abb. 46: 18:32

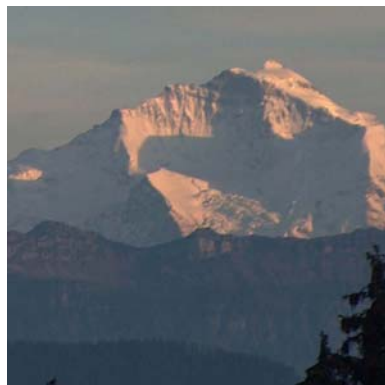


Abb. 47: 18:36

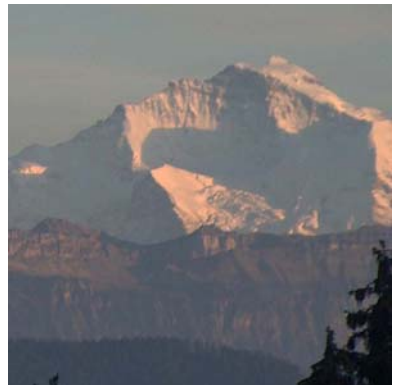


Abb. 48: 18:42

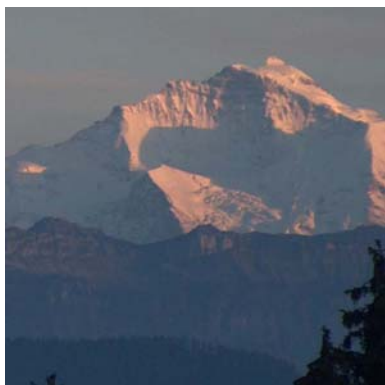


Abb. 49: 18:46

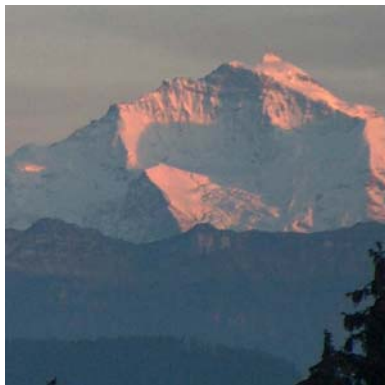


Abb. 50: 18:51



Abb. 51: 19:00, sunset

Was für Schlüsse kann man nun aus dieser Beobachtung schliessen? Zum einen stellt man fest, um **welche Tageszeit man das Kreuz (schön) sehen kann**. Dies ist der Fall **von 17:50 bis eigentlich zum Sonnenuntergang (um 19:00)**.

Die andere Beobachtung, die man machen kann, ist, auf welche Art sich der **Schatten verändert**. Der **Querbalken** des Kreuzes **wird immer breiter**, bzw. die Oberkante des Querbalkens verlagert sich immer mehr nach oben. Die Erklärung dafür ist, dass die Sonne mit der Zeit stets näher zum Horizont wandert und dadurch der Schatten „weiter oben“ zu sehen ist.

Eine weitere Veränderung der Schattenform stellt man auch beim **vertikalen Balken** fest. Dieser **wird mit der Zeit etwas schmaler**, was damit zusammenhängt, dass sich die Sonne westwärts bewegt.

Eine weitere Feststellung ist, dass etwas ab 18:19h eine kleine Felsrippe (in Abb. 44 gelb eingekreist) innerhalb des oberen Teils des Kreuzes beleuchtet wird. Aus die-

sem Grund dünkt mich, dass das Kreuz am 08.10.06 am allerschönsten um 18:14 zu sehen ist.

2.3.2 Beobachtung der Jungfrau mit dem Modell im Vordergrund

Die untenstehenden Bilder wurden beide in der Nähe von Affoltern i.E. aufgenommen. Zum einen ist das Jungfrau-Modell im Vordergrund zu sehen, zum anderen kann man im Hintergrund die reale Jungfrau erkennen. Bei der Aufnahme links war es ziemlich dunstig. Trotzdem kann man sehen, dass die Schattenformen beim Modell nahezu genau mit jenen der „richtigen“ Jungfrau übereinstimmen. Dasselbe gilt natürlich auch für das Bild rechts.

Ich habe beide Bilder eingefügt, damit man sehen kann, wie sich eine unterschiedliche Perspektive bei der Betrachtung auswirkt. Denn bei dem Bild links stimmt die Aufnahme-Perspektive der beiden Jungfrauen weniger überein.



Abb. 52: Die Jungfrau mit dem Jungfrau-Modell im Vordergrund, 17. Oktober, 17:55



Abb. 53: Die Jungfrau mit dem Jungfrau-Modell im Vordergrund, 26. Oktober, 17:47

2.3.3 Vergleich des Schattenkreuzes an verschiedenen Tagen

März

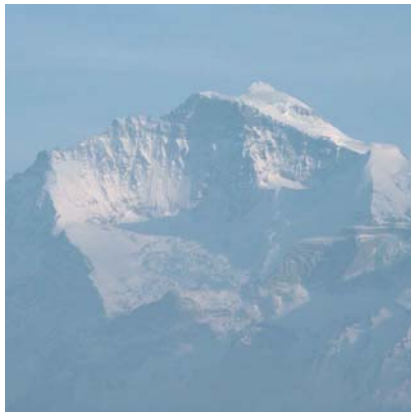


Abb. 54: 18. März, 18:25

Dieses Bild nahm ich am 18. März um 18:25 (Winterzeit) auf. Das Schattenkreuz ist fast noch nicht erkennbar. Der vertikale Teil des Kreuzes ist eigentlich vorhanden, einfach der Querbalken ist nicht zu sehen. Der Stand der Sonne beträgt zu diesem Zeitpunkt: Höhe = 10° / Azimut = 75.8° . Vergleicht man nun diese Resultate mit jenen des Sonnenstandes vom 08.10.06, 18:19 (Winterzeit) (Resultate: Höhe = 4.4° , Azimut = 75.0°), so stellt man fest, dass die Sonne bei fast gleichem Azimut im März höher, bzw. zu hoch am Himmel steht.

April

Laut Angaben von Benjamin Schär, Konolfingen, wurde das nebenstehende Bild in der ersten Aprilwoche 2006 zwischen 16:30 und 17:30 aufgenommen. Man kann das Kreuz zwar erkennen, doch ist es nicht so „schön“ wie im Herbst. Warum ist das so? Der Querbalken ist nicht so breit, während der vertikale Teil des Kreuzes relativ schmal ist. Dadurch ist das Kreuz weniger proportional.

Die Höhe der Sonne würde eigentlich in etwa stimmen, doch sie steht bereits zu sehr in westlicher Richtung. Um diese Aussage zu machen braucht man nicht einmal etwas auszurechnen. Man kann sich überlegen: Die Sonne steht im Sommer zur selben Tageszeit höher als im Winter. Sollte sie jetzt aber auf gleicher Höhe zu sehen sein, muss sie weiter westlich stehen.

Aus demselben Grund kann sich das Schattenkreuz auch nicht „weiterentwickeln“, da die Sonne stets westwärts wandert und dadurch noch mehr von der Jungfrau beleuchtet wird, als dies bereits bei dieser Aufnahme der Fall ist.



Abb. 55: Jungfrau anfangs April

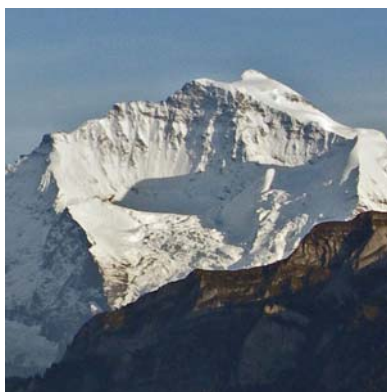


Abb. 56: 20. September, 18:49

September

Dieses Bild stammt vom 20. September 06, 18:49. Die Berechnung für den Sonnenstand ergibt: Höhe = 5.6° und Azimut = 84.3° . Es gilt für diesen Zeitpunkt eigentlich die gleiche Aussage wie für den April. Die Sonne steht zu weit westlich im Vergleich zu ihrer Höhe, damit das Schattenkreuz entstehen könnte.

Anfangs Oktober

Das Schattenkreuz ist nahezu optimal zu sehen. Links des Querbalkens bleibt ein kleiner Streifen beleuchtet und auch die Proportionen des Kreuzes stimmen relativ gut überein. Weitere Erläuterungen dazu sind im Kapitel 2.3.1 enthalten.



Abb. 58: 26. Oktober, 17:52

Ende Oktober

Ende Oktober machte ich noch dieses Foto. Der vertikale Teil des Kreuzes ist unverhältnismässig gross im Vergleich zum Querbalken. Der Stand der Sonne beträgt für die Höhe 3.4° und für den Azimut 70.0° . Aus diesen Resultaten kann man entnehmen, dass die Sonne zu tief ist für jenen Zeitpunkt im Vergleich zum Azimut. Im November, Dezember wird dann das Kreuz nicht mehr zu sehen sein, da die Sonne nicht mehr genug hoch steht.



Abb. 57: 06. Oktober, 18:43

3 Schlussfolgerung, Fazit

3.1 Schlussfolgerung

Die Berechnung des Sonnenstandes ergab (für den 8. Oktober):

- **Damit man das Schattenkreuz erkennen kann, darf die Sonne maximal 9° über dem Horizont stehen mit einem Azimut von 70° (West-Süd-West).** Das andere Ende der Bandbreite, in der man das Schattenkreuz sieht, liegt bei **Höhe = -1° und Azimut = 81° .**
- **Am „schönsten“** sieht man das Kreuz jedoch, wenn die Winkelkombination für **Höhe = 4° und Azimut = 75°** ist. Diese Kombination der beiden Winkel ist im Herbst, **anfangs Oktober gegen 18.20h** (Sommerzeit) vorhanden. Das Schattenkreuz kann man aber auch im **Frühling** (anfangs April) erkennen.

Ähnliche, wenn nicht gar **gleiche Ergebnisse ergab ein Experiment** mit einem selbst gebastelten Modell der Jungfrau, Dabei konnte man das Schattenkreuz bei einem Azimutwinkel von 75° und einem Höhenwinkel von 3° besonders gut sehen.

Die **obere horizontale Linie** des Kreuzes wird **vom** auf 3695 m liegenden flachen **Gipfelgrat des Silberhorns verursacht**. Für die linke und rechte Begrenzung des **oberen Teils des Kreuzes** ist die Felsrippe verantwortlich, über den die so genannte **“Lauperroute“** führt.

3.2 Persönliches Fazit

Abschliessend möchte ich noch schildern, wie ich die Entstehung dieser Arbeit erlebt habe. Da ich schon relativ früh (März 2006) mit dem Bau des Modells begann, war bereits ein wichtiger und arbeitsintensiver Teil der Arbeit erledigt. In den Frühlingsferien begann ich, mich mit dem theoretischen Teil der Arbeit auseinander zu setzen. Im Sommer und Herbst folgten dann die Beobachtungen und einzelne Korrekturen, die zum vorliegenden Ergebnis führten.

3.2.1 erreichte Ziele

Habe ich meine eingangs der Arbeit gestellten Ziele erreicht?

- Das erste Ziel war die Berechnung des Sonnenstandes für einen bestimmten Zeitpunkt an dem man das Schattenkreuz sah. Dieses Ziel wurde in Kapitel 2.1 erreicht.
- Mein zweites Ziel war der Bau eines Jungfrau-Modells, um das Schattenkreuz sichtbar machen zu können. Betrachtet man die Bilder in Kapitel 2.2.2 darf man sagen, dass auch hier gilt: „Ziel erreicht“.
- Ich weiss nun, welche Gebirgsformen für das Schattenkreuz verantwortlich sind.

3.2.2 Kritik

Welche negativen Punkte stelle ich fest?

- Etwas (zu) wenig Beachtung in dieser Arbeit fand die Untersuchung des Schattenkreuzes im Frühling. Dafür gibt es vor allem die Erklärung, dass zu diesem Zeitpunkt das Wetter zur Beobachtung ungünstig war. Laut Aussagen von Personen, denen das Schattenkreuz auch schon aufgefallen ist, kann man das Kreuz im Frühling jedoch auch weniger gut erkennen als im Herbst.
- Der zweite Kritikpunkt ist für mich, dass ich die jeweiligen Zeitspannen im Frühling und im Herbst, in denen das Kreuz zu sehen ist, zeitlich nicht genauer bestimmen konnte. Ich kann zwar sagen, dass man das Kreuz im Herbst (September/Oktober) und im Frühling (April) sieht. Doch konnte ich nicht gross untersuchen, wie sich das Kreuz im Verlauf des Jahres verändert, bzw. ab wann man es im Sommer und Winter nicht mehr sieht. Der wichtigste Grund dafür ist sicher auch hier das Wetter, da man vom Mittelland aus nicht häufig klar in die Alpen sieht und somit oft keine Beobachtung möglich war.

Aber diese Arbeit darf auf jeden Fall als gelungen betrachtet werden!

4 Literaturverzeichnis, Bildernachweis, Dank, eidesstattliche Erklärung

4.1 Literaturverzeichnis

Buch

Imhof Eduard.1981. Bildhauer der Berge. Schweizerischer Alpen-Club

Internet

- Koordinatensysteme,
<http://www.zum.de/Faecher/Materialien/gebhardt/astronomie/koordsys.html>
(21.05.2006)
- Das Online-Lexikon der Astronomie von astronomie.info,
<http://lexikon.astronomie.info/stichworte/o.html> (21.05.2006)"
- Die Zeitgleichung – Eine einfache Formel zu Sonnenaufgang und Untergang,
<http://lexikon.astronomie.info/zeitgleichung/> (03.01.2006)
- Das Sphärische oder Nautische Dreieck,
http://www.greier-greiner.at/hc/sph_dreieck.htm (03.01.2006)
- Calsky - Der Himmelsanblick,
<http://www.astronomie.info/calsky/Sun/index.html/1> (09.05.2006)

4.2 Bildernachweis

Titelseite	das Bild ist ursprünglich von http://www.jungfraubahn.ch/de/Desktopdefault.aspx/tabid-111/62_read-604/ (09.05.2006); danach bearbeitet von David Lips
Abb. 1	Astronomische Koordinaten, http://www.greier-greiner.at/hc/koord.htm (09.05.2006)
Abb. 2, 3	Koordinaten-Systeme: Das Horizont-System, http://www.greier-greiner.at/hc/horizont.htm (09.05.2006)
Abb. 4, 5, 6	Koordinatensysteme: Das Äquator-System II (rotierendes), http://www.greier-greiner.at/hc/parall_2.htm (09.05.2006)
Abb. 7	Die Zeitgleichung, http://www.greier-greiner.at/hc/zeitgleichung.htm (09.05.2006)
Abb. 8	Die Zeitgleichung – Eine einfache Formel zu Sonnenaufgang und Untergang, http://lexikon.astronomie.info/zeitgleichung/ (09.05.2006)
Abb. 9, 10, 11	Das Sphärische oder Nautische Dreieck, http://www.greier-greiner.at/hc/sph_dreieck.htm (09.05.2006)
Abb. 12	http://www.uni-saarland.de/fak7/EKW-Vorlesung/V3_Ewige_Energiequellen/V3.2_Sonne/V3.2_SolareEinstrahlung.ppt#297,33,Folie (09.10.2006)
Abb. 13-15, 17-29, 30-54, 58	Eigene Bilder, Aufgenommen mit der Digitalkamera "hp photosmart 850"
Abb. 16, 30	Eigene Darstellungen
Abb. 55	Benjamin Schär, Konolfingen
Abb. 56-57	Heinz Rieder, Beatenberg

4.3 Dank

Zum Endergebnis dieser Matura-Arbeit haben verschiedene Personen beigetragen. Dabei geht mein Dank insbesondere an ...

- meinen Betreuer Simon Fankhauser, der mich bei dieser Arbeit begleitet und unterstützt hat.
- meinen Grossvater Martin Lips und an die Jordi + Kolb AG, Münsingen, die mir das Kartenmaterial unentgeltlich zur Verfügung gestellt haben.
- meine Eltern, die mich bei dieser Arbeit unterstützten, insbesondere an meinen Vater, der mich beim Bau des Modells beriet.
- Heinz Rieder und Fritz Bieri, Beatenberg (www.beatenbergbilder.ch), die mir Fotos der Jungfrau zur Verfügung stellten.
- Benjamin Schär, der mir Fotos von der Jungfrau im Frühling aufnahm.
- meinen Bruder Samuel, der mir das Modell weiss spritzte.

4.4 eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Matura-Arbeit eigenständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe erstellt habe und dass alle Quellen, Hilfsmittel und Internetseiten wahrheitsgetreu verwendet wurden und belegt sind.

Wynigen, 30.10.06, _____

David Lips



5 Anhang

5.1 *Excel-Programm zur Berechnung des Sonnenstandes*

5.2 *Differenz zwischen meinen Berechnungen und jenen von Calsky.com*

5.3 *Landeskarte mit eingezeichnetem im Modell dargestellten Gebiet*